Quiz Μαθηματικής Αντίληψης

Διάρκεια 60 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1 (Συντακτικό)
Στα μαθηματικά όταν μας ρωτούν αν ένας ισχυρισμός (ή αλλιώς μία πρόταση) είναι αληθής ή ψευδής, ΠΑΝΤΑ η απάντησή μας γίνεται με ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ, ειδάλλως αυτή είναι ελλιπής. Εαν πιστεύουμε ότι ο ισχυρισμός είναι ΑΛΗΘΗΣ, τότε τον αποδεικνύουμε με τη βοήθεια είτε τουλάχιστον ενός ορισμού, είτε μίας (αληθούς) πρότασης, είτε ενός θεωρήματος (δημοφιλής πρόταση), είτε με συνδυασμό αυτών. Σε περίπτωση που θεωρούμε ότι ο ισχυρισμός είναι ΨΕΥΔΗΣ, τότε δίνουμε αντιπαράδειγμα, δηλαδή ένα παράδειγμα για το οποίο ο ισχυρισμός δεν ισχύει. Όταν απαντούμε μαθηματικώς για το αν μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής πρέπει πρώτα να συντάξουμε την απάντησή μας με ορθό τρόπο ακολουθώντας κάποιους κανόνες ευρεύως διαδεδομένους προκειμένου να υπάρχει συνενόηση μεταξύ μας. Πχ οι προτάσεις «Για κάθε μπαούλο, υπάρχει κλειδί που να το ανοίγει» και «υπάρχει κλειδί, για κάθε μπαούλο που να το ανοίγει» έχουν διαφορετικό νόημα. Η πρώτη λέει ότι για τυχαίο μπαούλο Α, υπάρχει κλειδί Β του οποίου η επιλογή εξαρτάται από το μπαούλο το οποίο έχει προεπιλεγεί (αληθής πρόταση). Με άλλα λόγια, αλλαγή στο μπαούλο επιφέρει (ενδεχόμενη) αλλαγή στο κλειδί. Από την άλλη μεριά, η δεύτερη λεεί ότι υπάρχει κλειδί για όλα τα μπαούλα, δηλαδή τουλάχιστον ενα (πασπαρτού) κλειδί που να ανοίγει όλα τα μπαούλα ανεξαρτήτου επιλογής μπαούλου (ψεύδής πρόταση). Οι εκφράσεις «για κάθε» και «υπάρχει» λέγονται **ποσοδείκτες**. Η πρώτη λέγεται **καθολικός ποσοδείκτης** και η δεύτερη **υπαρξιακός ποσοδείκτης**. Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση (με αιτιολογηση) ως ΑΛΗΘΗΣ ή ΨΕΥΔΗΣ στηριζόμενοι αποκλειστικά και μόνο στον ακόλουθο ορισμό:

«Ένας ακέραιος αριθμός k **διαιρείται** από έναν ακέραιο αριθμό m, αν υπάρχει (τουλάχιστον) ένας ακέραιος αριθμός n_0 έτσι ώστε $k = n_0 \cdot m$».

(i) Κάθε ακέραιος αριθμός διαιρείται από το 2.

(ii) Υπάρχει ακέραιος αριθμός που διαιρείται από το 2.

(iii) Για κάθε ακέραιο αριθμό k, υπάρχει ακέραιος αριθμός m έτσι ώστε ο k να διαιρείται από τον m.

(iv) Για κάθε ακέραιο αριθμό k, υπάρχει ακέραιος αριθμός $m \neq 1, k$ έτσι ώστε ο k να διαιρείται από τον m.

(v) Υπάρχει ακέραιος αριθμός m ώστε για κάθε ακέραιο αριθμό k, ο k να διαιρείται από τον m.

(vi) Υπάρχει ακέραιος αριθμός $m \neq 1$, ώστε για κάθε ακέραιο αριθμό k, ο k να διαιρείται από τον m.

(vii) Για κάθε άρτιο ακέραιο αριθμό k, υπάρχει ακέραιος αριθμός $m \neq 1, k$, ώστε ο k να διαιρείται από τον m.

(viii) Για κάθε άρτιο ακέραιο αριθμό k, υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος $m \neq 1, k$, ώστε ο k να διαιρείται από τον m.

(ix) Υπάρχει ακέραιος αριθμός $m \neq 1$, ώστε για κάθε άρτιο ακέραιο αριθμό k, ο k να διαιρείται από τον m.

(x) Οι προτάσεις (vii) και (ix) είναι ισοδύναμες (δηλ. έχουν το ίδιο νόημα).

Θέμα 2 (Διαίσθηση)
Γενικά, όταν έχουμε διαβάσει μια εκφώνηση χρήσιμο είναι να γεωμετρικοποιούμε το πρόβλημα, καθώς αυτό μπορεί να μας δώσει μια καλή εποπτεία για το ποια είναι η απάντηση του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε. Σε καμία περίπτωση το συμπέρασμα που θα μας δώσει ένα σχήμα ή μια ζωγραφιά δεν μπορεί να θεωρηθεί μαθηματικά αποδεκτός τρόπος επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Ας ελέγξουμε τώρα τι θυμάστε από το λύκειο.

(a) Να σχεδιάσετε (ποιοτικά) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

(i) $f(x) = -2\sin(\pi x),\ x \in [0, 6]$.

(ii) $g(x) = \tan x,\ x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$.

(iii) $h(x) = \cot x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$.

(iv) $s(x) = \ln|x|,\ x \in \mathbb{R}^*$

(v) $r(x) = \begin{cases} 1 - |x+1| & , \quad |x+1| < 1, \\ 0 & , \quad |x+1| \geq 1, \end{cases}$,

όπου sin είναι το ημίτονο, tan η εφαπτομένη και cot η συνεφαπτομένη.

(b) Είναι αληθές ότι η συνάρτηση του ημιτόνου είναι η συνάρτηση του συνημιτόνου, αν μεταθέσουμε δεξιά τη γραφική του ημιτόνου κατά έναν κατάλληλο αριθμό a; Αν ναι, τότε ποιος είναι αυτός ο αριθμός; Είναι μοναδικός;

(c) Αφού σχεδιάσετε (ποιοτικά) τις γραφικές παραστάσεις, να βρείτε όλες οι ρίζες (και το πλήθος αυτών) των συναρτήσεων $f, g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ x > 0$ και $g(x) = \cos(x^2),\ x > 0$. Ποια από τις $f_1(x) = 4x + x\sin\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in \mathbb{R}$ και $f_2(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x,\ x \in \mathbb{R}$ έχει άπειρες ρίζες; Ποιές είναι αυτές;

<u>ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!</u>